Dynamikk Formelsamling

Kristian Torvik
MASG2106 — REV-C

Konstantar: $g = 9.81$ m/s^2 $G = 66.73 \cdot 10^{-12}$ m^3/(kg $\cdot$ s^2) 1 J = 1 N $\cdot$ m 1 hp = 746 W rpm→rad/s: $\omega = \pi N/30$

§1 Kinematikk av partiklar

Rettlinja

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad a = \frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dx}$$

Konstant akselerasjon:

$v = v_0 + at$

$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$

Tre integrasjons-tilfelle:

$a = f(t)$ $\quad \int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a(t)\,dt$

$a = f(x)$ $\quad \int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a(x)\,dx$

$a = f(v)$ $\quad \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{a(v)} = t$ eller $\int v\frac{dv}{a(v)} = x$

Projektil

$a_x = 0, \quad a_y = -g$

$x = (v_x)_0\, t, \quad y = (v_y)_0\, t - \frac{1}{2}gt^2$

Skrå utskyting med vinkel α:

$v_x = v_0 \cos\alpha, \quad v_y = v_0 \sin\alpha - gt$

Bane-form (eliminert tid):

$$y(x) = x\tan\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$$

Maks høgde: $h_{\text{max}} = \dfrac{(v_0\sin\alpha)^2}{2g}$

Tangentiell og normal

$a_t = \frac{dv}{dt}, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho}$

$\vec{a} = a_t\,\hat{e}_t + a_n\,\hat{e}_n$

ρ = krumningsradius som passar best akkurat i det tidspunktet.

Krumningsradius for $y = f(x)$:

$$\rho = \frac{(1 + (dy/dx)^2)^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

Radial og transvers (polar)

$\vec{v} = \dot{r}\,\hat{e}_r + r\dot{\theta}\,\hat{e}_\theta$

$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\hat{e}_\theta$

Kartesisk ↔ polar:

$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan\theta = y/x$

$\dot{r} = \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{r}, \quad \dot{\theta} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{r^2}$

Translasjon-relativ

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_{B/A}$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{B/A}$

§2 Kinetikk av partiklar (Newton 2. lov)

Kartesisk $\sum F_x = ma_x$, $\sum F_y = ma_y$

Tang./norm. $\sum F_t = ma_t$, $\sum F_n = mv^2/\rho$

Radial/trans. $\sum F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$, $\sum F_\theta = m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})$

Angulær bevegelsesmengde

Fullstendig definisjon er 3D:

$\vec{H}_O = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad H_O = mr^2\dot{\theta}$

$\dot{\vec{H}}_O = \sum \vec{M}_O$

2D (skalar, ut av planet, mot klokka $= +$):

$H_O = m(xv_y - yv_x)$	x, y frå rotasjonssenter
$H_O = mvd$	d = vinkelrett avstand (momentarm)
$H_O = mrv_\theta$	$v_\theta = r\dot{\theta}$
$= mrv\sin\varphi$	φ mellom $\vec{r}, \vec{v}$
$H_O = mr^2\dot{\theta}$	(sirkulær form)
$\dot{H}_O = \sum M_O$	$M_O = \sum(xF_y - yF_x)$

Sentralkraft (konservering):

$r_0\, mv_0 \sin\varphi_0 = r\, mv \sin\varphi$

$h = r^2\dot{\theta} =$ konst

Gravitasjon og banar

$F = \frac{GMm}{r^2}$

$v_{\text{circ}} = \sqrt{GM/r_0}, \quad v_{\text{esc}} = \sqrt{2GM/r_0}$

Konisk seksjon: $\frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2}(1 + \varepsilon\cos\theta)$

Periodetid (ellipse):

$\tau = \frac{2\pi ab}{h}, \quad a = \frac{1}{2}(r_0 + r_1), \quad b = \sqrt{r_0 r_1}$

$GM = gR^2$ (R = planet-radius, g = overflate-akselerasjon)

$R_{\text{jord}} \approx 6370$ km, $\quad GM_{\text{jord}} \approx 3.99 \times 10^{14}$ m^3/s^2

Eksentrisitet frå initialverdiar (ved $\theta = 0$):

$C = \frac{1}{r_0} - \frac{GM}{h^2}, \quad \frac{1}{r} = \frac{GM}{h^2} + C\cos\theta$

$r_{\text{max}} = \frac{1}{GM/h^2 - C}$ (ved $\theta = 180$)

Bane-klassifisering: $\varepsilon = \frac{Ch^2}{GM}$

< 1 ellipse, $= 1$ parabel, > 1 hyperbel.

Sirkulær bane — krefter

Doseringsvinkel (utan friksjon):

$$\tan\theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

Sample 2.5 — rated speed på sving.

Dosering med friksjon (maks fart):

$$\frac{v_{\text{max}}^2}{g\rho} = \frac{\tan\theta + \mu_s}{1 - \mu_s \tan\theta}$$

"Mister kontaktkriterium (konveks bane):

$$N = m\left(g - \frac{v^2}{\rho}\right) = 0 \;\Rightarrow\; v^2 = g\rho$$

Klassisk topp-av-bakke / loop-the-loop minimumsfart.

§3 ENERGI OG MOMENTUM (PARTIKLAR)

Arbeid U

$$U_{1\to 2} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

Tyngd: $U = -mg\,\Delta y$

Fjør: $U_{1\to 2} = \frac{1}{2}kx_1^2 - \frac{1}{2}kx_2^2$

Tyngd over store avstandar (rom): $U_{1\to 2} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$

Rotasjon: $U_\theta = M\cdot\Delta\theta$

Konstant kraft, rettlinja: $U = F\cos\alpha\cdot\Delta x$

Kinetisk energi T

$T_k = \frac{1}{2}mv^2$

$T_\theta = \frac{1}{2}I\,\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}I\,\omega^2$

(I = massetreghetsmoment)

Potensiell energi V

$V_g = mgy$ (nær bakken)

$V_g = -GMm/r$ (når $g \neq 9.81$)

$V_e = \frac{1}{2}kx^2$ (frå avslappa lengd)

Effekt P

$P = \vec{F}\cdot\vec{v}, \quad \eta = P_{\text{ut}}/P_{\text{inn}}$

$P = \dot{\theta}\cdot M$ (M = dreiemoment)

Impuls-momentum

$$m\vec{v}_1 + \int \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2$$

Støt (kort tid): $m\vec{v}_1 + \sum \vec{F}\,\Delta t = m\vec{v}_2$

Støt (partikkel)

Direkte sentralt:

$m_Av_A + m_Bv_B = m_Av'_A + m_Bv'_B$

$\boxed{v'_B - v'_A = e(v_A - v_B), \quad 0 \le e \le 1}$

e = koeffisient av restitusjon.

Skråstilt sentralt (n = støttlinja, t = tangent):

$(v_A)_t = (v'_A)_t, \quad (v_B)_t = (v'_B)_t$

$m_A(v_A)_n + m_B(v_B)_n = m_A(v'_A)_n + m_B(v'_B)_n$

$(v'_B)_n - (v'_A)_n = e\,[(v_A)_n - (v_B)_n]$

Plastisk ($e = 0$): $v'_A = v'_B$, KE-tap.

Elastisk ($e = 1$): KE bevart.

Energitap i direkte sentralt støt:

$$\Delta T = -\frac{1}{2}\frac{m_Am_B}{m_A + m_B}(v_A - v_B)^2(1 - e^2)$$

Direkte formel — slepp å rekne T før/etter separat.

Støt mot fast vegg / uendeleg masse:

$\boxed{v'_n = -e\,v_n, \quad v'_t = v_t}$ (tangensiell uendra)

Sprett-høgde i serie:

Ball droppa frå h_0, koeffisient e: $h_n = e^{2n}h_0$.

§4 KINEMATIKK AV RIGID BODIES

Rotasjon om fast akse

$\dot{\omega} = \alpha$

$v = r\omega, \quad a_t = r\alpha, \quad a_n = r\omega^2$

$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r}$

$\vec{a} = \vec{\alpha}\times\vec{r} - \omega^2\vec{r}$ (i 2D)

Konstant vinkelakselerasjon:

$\omega = \omega_0 + \alpha t$

$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$

Generell plan bevegelse

Når A, B er på same stive legeme:

$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{\omega}\times\vec{r}_{B/A}$

$v_{B/A} = r_{B/A}\,\omega$

$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{\alpha}\times\vec{r}_{B/A} - \omega^2\vec{r}_{B/A}$

$(a_{B/A})_t = r\alpha, \quad (a_{B/A})_n = r\omega^2$

Momentanpol (IC, Instantaneous Center)

C = punkt med $\vec{v}_C = 0$ akkurat no.

$|AC|$ = avstand frå A til C (skalar).

$\omega = \frac{v_A}{|AC|}, \quad v_B = |BC|\cdot\omega$

v_A, v_B er storleikar av hastigheitsvektorane.

$\vec{v}_A \perp AC$, $\vec{v}_B \perp BC$ (vinkelrett på linjestykket til C).

Korleis finna C: Trekk normalar (vinkelrette linjer) på $\vec{v}_A$ og $\vec{v}_B$ gjennom A og B. C er der dei kryssar.

Fungerer IKKJE for akselerasjonar — C flyttar seg over tid, så $\vec{a}_C \neq 0$ sjølv om $\vec{v}_C = 0$.

Roterande referansesystem (Coriolis)

$(\dot{\vec{Q}})_{\text{fast}} = (\dot{\vec{Q}})_{\text{rot}} + \vec{\Omega}\times\vec{Q}$

$\vec{v}_P = \vec{\Omega}\times\vec{r} + \vec{v}_{\text{rel}}$

$\vec{a}_P = \dot{\vec{\Omega}}\times\vec{r} + \vec{\Omega}\times(\vec{\Omega}\times\vec{r})$
$\quad + \vec{a}_{\text{rel}} + 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\text{rel}}$

Coriolis: $\vec{a}_c = 2\vec{\Omega}\times\vec{v}_{\text{rel}}$

§5 Plan rørsle — Krefter og akselerasjonar

Tre likningar:

$$\sum F_x = m\bar{a}_x$$

$$\sum F_y = m\bar{a}_y$$

$$\sum M_G = \bar{I}\alpha$$

For fast akse O (shortcut):
$\sum M_O = I_O\alpha, \quad I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$ (Steiner)

Sentrale massetreghetsmoment

Lekam	**Akse**	$\bar{I}$
Tynn stang L	senter $\perp$	$\frac{1}{12}mL^2$
Tynn stang L	ende $\perp$	$\frac{1}{3}mL^2$
Skive/sylinder r	symmetri-akse	$\frac{1}{2}mr^2$
Tynn ring r	symmetri-akse	mr^2
Kule r	gjennom senter	$\frac{2}{5}mr^2$
Kvadrat-plate b	$\perp$ senter	$\frac{1}{6}mb^2$
Rektangel $a \times b$	$\perp$ senter	$\frac{1}{12}m(a^2+b^2)$
Hol sylinder r_1, r_2	langsgåande	$\frac{1}{2}m(r_1^2+r_2^2)$

Steiner: $I_O = \bar{I} + m\bar{r}^2$
(parallele akser, ein gjennom G)

Gyrasjonsradius (radius of gyration):
$\bar{I} = m\bar{k}^2, \quad I_O = mk_O^2$

§6 Plan rørsle — Energi og Momentum

Kinetisk energi

Generell plan rørsle:
$T = \frac{1}{2}m\bar{v}^2 + \frac{1}{2}\bar{I}\omega^2$
Fast akse O: $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$
Rein translasjon: $T = \frac{1}{2}mv^2$

Arbeid av par

$$U_{1\to2} = \int M\,d\theta = M(\theta_2 - \theta_1) \text{ (konst } M)$$

Bevaring av energi

$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$
$V_g = mgy_G, \quad V_e = \frac{1}{2}kx^2$

Effekt for par

$P = M\omega$

Bevegelsesmengde

$\vec{L} = m\vec{\bar{v}}, \quad \vec{H}_G = \bar{I}\,\vec{\omega}$
Fast akse O: $H_O = I_O\,\omega$

Impuls-momentum (Rigid body)

$$m\vec{\bar{v}}_1 + \int \sum \vec{F}\,dt = m\vec{\bar{v}}_2$$

$$\bar{I}\,\omega_1 + \int \sum M_G\,dt = \bar{I}\,\omega_2$$

Fast akse: $I_O\,\omega_1 + \int \sum M_O\,dt = I_O\,\omega_2$

Eksentrisk støt

Steg 1 — Identifiser konservert storleik:
Støtkraft i kontaktpunkt $Q \Rightarrow H_Q$ er bevart:

$$H_Q^{\text{før}} = H_Q^{\text{etter}}$$

Steg 2 — Koeffisient av restitusjon:
Bruk **KONTAKTPUNKT-hastigheiter**, ikkje massesenter:

$$e = \frac{(v_B')_n - (v_A')_n}{(v_A)_n - (v_B)_n}$$

Kontaktpunkt-hastigheit:
$\vec{v}_{\text{kont}} = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{\text{kont}/G}$
Perfekt plastisk ($e = 0$):
$(v'_{\text{kont,A}})_n = (v'_{\text{kont,B}})_n$
(eller $= 0$ viss B er fast)

§7 Trigonometri og logaritmar

Resiproke samanhengar

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}, \quad \csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Pythagoras-identitetar

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \tan^2\alpha = \sec^2\alpha$$

$$1 + \cot^2\alpha = \csc^2\alpha$$

Dobbel vinkel

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$= 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

Halv vinkel / kvadrat-omskriving:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}, \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

Trippel vinkel

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$

Sum og differanse

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

Sum til produkt

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Produkt til sum

$$\sin\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \tfrac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

Logaritmereglar

$$\ln(a\cdot b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$$

$$\ln(a^b) = b\cdot\ln a$$

$$\log_a b = \frac{\ln b}{\ln a}$$

§8 Derivasjon

Reglar

Konstant: $\frac{d}{dx}(c) = 0$

Potens: $\frac{d}{dx}(x^n) = n\,x^{n-1}$

Konstant-faktor: $(c\,f)' = c\,f'$

Sum: $(f\pm g)' = f' \pm g'$

Produkt: $(f\,g)' = f'g + f\,g'$

Kvotient: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - f\,g'}{g^2}$

Kjerne: $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))\cdot g'(x)$

Tabell — algebraisk

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$1/x$	$-1/x^2$
$1/x^n$	$-n/x^{n+1}$

Tabell — exp/log

$f(x)$	$f'(x)$
e^x	e^x
e^{kx}	$k\,e^{kx}$
a^x	$a^x\ln a$
$\ln x$	$1/x$
$\log_a x$	$\frac{1}{x\ln a}$

Tabell — trig og hyperbolsk

$f(x)$	$f'(x)$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$
$\cot x$	$-\csc^2 x$
$\sec x$	$\sec x\,\tan x$
$\csc x$	$-\csc x\,\cot x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$1-\tanh^2 x$

§9 Integrasjon

Grunnreglar

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

$$\int c\,dx = c\,x + C$$

Potens ($n \neq -1$): $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Spesialtilfelle: $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x|$

Konstantfaktor: $\displaystyle\int c\,f\,dx = c\int f\,dx$

Sum: $\displaystyle\int (f \pm g)\,dx = \int f\,dx \pm \int g\,dx$

Substitusjon (omvendt kjerne)

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(u)\,du, \quad u = g(x)$$

Sett $u =$ "innerstefunksjon, $du = g'(x)\,dx$, bytt om alt, integrér, bytt tilbake.

Delvis integrasjon

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

LIATE-val for u (øverst først):
Log > **I**nvers trig > **A**lgebraisk > **T**rig > **E**xp

Strategi — kva for kva

1. Standardform? → tabell.
2. Sum av enkle ledd? → bryt opp.
3. Konstant foran? → utanfor.
4. Funksjon + dens deriverte? → substitusjon.
5. Produkt av ulike funksjonstypar? → delvis (LIATE).
6. Rasjonal $P(x)/Q(x)$? → delbrøk-oppspalting.
7. Trig kvadrat/produkt? → identitets-omskriving.
8. Symmetrisk intervall? → sjekk odd/even (kan gi 0).

Tabell — algebraisk

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$c\,x$
$x^n,\ n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$1/x$	$\ln|x|$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{3/2}$
$1/\sqrt{x}$	$2\sqrt{x}$

Tabell — exp/log

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
e^x	e^x
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\ln x$	$x\ln x - x$

Tabell — trig

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\ln|\cos x|$
$\cot x$	$\ln|\sin x|$
$\sec x$	$\ln|\sec x + \tan x|$
$\csc x$	$-\ln|\csc x + \cot x|$
$\sec^2 x$	$\tan x$
$\csc^2 x$	$-\cot x$
$\sec x \tan x$	$\sec x$
$\csc x \cot x$	$-\csc x$
$\sin^2 x$	$\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$
$\cos^2 x$	$\frac{x}{2} + \frac{\sin 2x}{4}$

Tabell — gir invers-trig

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)$
$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$	$\operatorname{arcsec}|x|$

Tabell — hyperbolsk

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\tanh x$	$\ln\cosh x$